Η διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως μεταπτυχιακό μάθημα

Γιάννης Θωμαΐδης

Δρ. Μαθηματικών – Σχολικός Σύμβουλος

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Εαρινό Εξάμηνο Ακαδημαϊκού Έτους 2014–2015

Τίτλος μαθήματος:

Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.

Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους

ΠΡΩΤΟΣ ΑΞΟΝΑΣ

Ιστορία των Μαθηματικών & Μαθηματική Εκπαίδευση:
Σύγχρονες τάσεις, κρίσιμα ζητήματα και μια μελέτη περίπτωσης
(Ιστορική εξέλιξη και διδασκαλία της Άλγεβρας)

(2 ερευνητικές εργασίες)

Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΑΞΟΝΑΣ

Στιγμιότυπα και Εικόνες από την Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών σε Ελληνικά Αναλυτικά Προγράμματα και Διδακτικά Βιβλία

(4 ερευνητικές εργασίες)

Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους

ΤΡΙΤΟΣ ΑΞΟΝΑΣ

Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες:
Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών και της απόλυτης τιμής

(2 ερευνητικές εργασίες)

Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους

ΤΕΤΑΡΤΟΣ ΑΞΟΝΑΣ

Διαθεματικές αναζητήσεις στην Ιστορία των Μαθηματικών

(2 ερευνητικές εργασίες)

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ

Το εκπαιδευτικό υλικό του μαθήματος είναι προσαρμοσμένο στις απαιτήσεις ενός προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών, και έχει στόχο την εξοικείωση των φοιτητών με τη μεθοδολογία της επιστημονικής έρευνας στο αντίστοιχο γνωστικό πεδίο.

Αυτή η εξοικείωση προϋποθέτει την έγκαιρη και οριστική υπέρβαση παγιωμένων αντιλήψεων για τη διδασκαλία και μάθηση, που συνδέονται με έννοιες όπως «μετωπική διδασκαλία», «ένα και μοναδικό διδακτικό εγχειρίδιο», «εξεταστέα ύλη» κ.λπ.

Υπηρετώντας αυτό το στόχο, η διδασκαλία συνδυάζει τις θεωρητικές αρχές του γνωστικού πεδίου με άμεσες εφαρμογές στη διδακτική πράξη επιδιώκοντας την ενεργό συμμετοχή των φοιτητών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το εκπαιδευτικό υλικό περιλαμβάνει:

- **Ένα τεύχος με τους βασικούς άξονες ανάπτυξης του μαθήματος, τη θεματολογία, τα ερωτήματα και την υποστηρικτική βιβλιογραφία των 10 ερευνητικών εργασιών. Το τεύχος διανέμεται στο δεύτερο μάθημα.**
- **Έναν εκτενή βιβλιογραφικό οδηγό για μεγαλύτερη εμβάθυνση στα ζητήματα που συνδέονται με τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών.**
- **Τις ατομικές σημειώσεις των φοιτητών από τις διαλέξεις του μαθήματος.**
- **Ένα τεύχος με τα τελικά κείμενα των ερευνητικών εργασιών που εκπόνησαν οι φοιτητές, το οποίο διανέμεται σε όλους πριν από τις τελικές εξετάσεις.**

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Οι φοιτητές αξιολογούνται με βάση τα εξής στοιχεία:

- **Την παρακολούθηση των διαλέξεων του μαθήματος και την ενεργό συμμετοχή σε αυτές με ερωτήσεις, παρεμβάσεις και τοποθετήσεις.**
- **Την επιλογή, εκπόνηση και παρουσίαση ενώπιον του τμήματος μιας από τις 10 ερευνητικές εργασίες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Η εργασία μπορεί να εκπονηθεί είτε ατομικά είτε από μία ομάδα δύο φοιτητών.**
- **Την επίδοση στις τελικές εξετάσεις του μαθήματος. Σύμφωνα με τις αρχές που εκτέθηκαν προηγουμένως, τα θέματα των εξετάσεων δεν στοχεύουν στην αναπαραγωγή μιας προκαθορισμένης «εξεταστέας ύλης», αλλά στη διαπίστωση της αναλυτικής και συνθετικής ικανότητας των φοιτητών να αναπτύξουν ορισμένες βασικές αρχές και από τους τέσσερις άξονες του μαθήματος.**

Ένα παράδειγμα διδακτικής αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών

Αντιμέτωποι με ένα γρίφο:

Υπάρχει αλγεβρική σκέψη χωρίς αγνώστους, εξισώσεις, παραμέτρους και μεταβλητές;

Μια ιστορική εισαγωγή στη θεματική ενότητα *Εξισώσεις* του βιβλίου Μαθηματικών της ΣΤ΄ Δημοτικού (σ.60)

Εξισώσεις

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις. Με άλλα λόγια, με τη χρήση γραμμάτων ή συμβόλων στη θέση ενός αριθμού που δεν γνωρίζουμε.

Από την 8η χιλιετία π.Χ. οι κάτοικοι της Μεσοποταμίας, πολύ πριν από τους Σουμέριους, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρές πήλινες «μάρκες». Από εκεί πληροφορούμαστε ότι χρησιμοποιούσαν αριθμητικές μεθόδους πολύ πιο εξελιγμένες από την απλή καταμέτρηση γεωργικών προϊόντων και τους απλούς εμπορικούς και οικονομικούς σκοπούς της εποχής τους.

Βρέθηκαν στις «μάρκες» προβλήματα της εποχής εκείνης που απαιτούν τη χρήση εξισώσεων για την επίλυσή τους. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω πρόβλημα.

Βρήκα μια πέτρα. Δεν (τη) ζύγισα. Αφαίρεσα το ένα έβδομο. Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο. Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο. (Τη) ζύγισα. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας;

Τι παρατηρείτε;

Φαίνεται πως τα Μαθηματικά ήταν για τους κατοίκους της Μεσοποταμίας ένα απαραίτητο εργαλείο με το οποίο μπορούσαν να αποκρυπτογραφήσουν τις κινήσεις του Ουρανού και μια γλώσσα με την οποία μπορούσαν να επικοινωνήσουν και να καταλάβουν τους θεούς τους.

Το 9ο πρόβλημα της Βαβυλωνιακής πινακίδας YBC 4652

Βρήκα μια πέτρα, (αλλά) δεν τη ζύγισα· (ύστερα) αφαίρεσα ένα έβδομο, πρόσθεσα ένα ενδέκατο, (και) αφαίρεσα ένα δέκατο τρίτο, (τη) ζύγισα: 1 ma–na. Ποιο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας; (Το αρχικό βάρος) της πέτρας ήταν

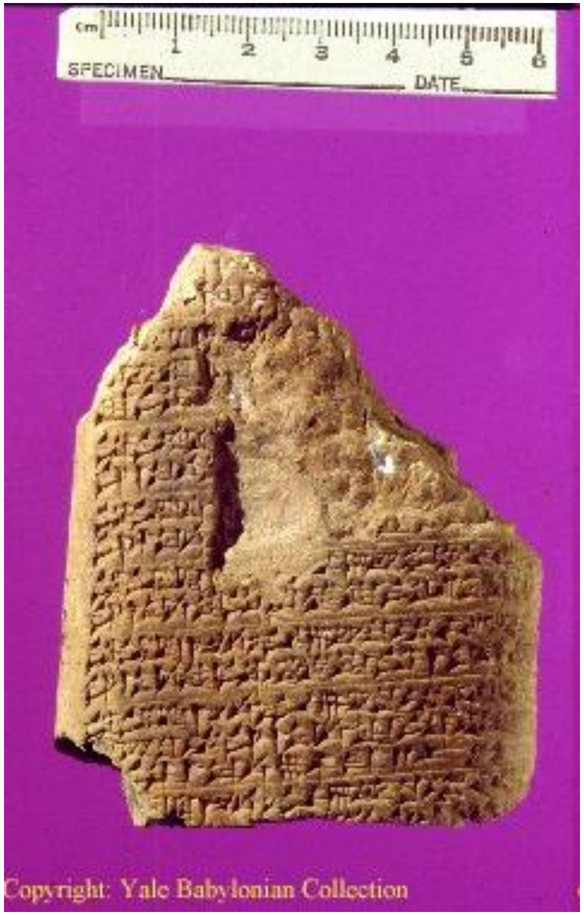
1 ma–na, 9½ gin (και) 2½ se

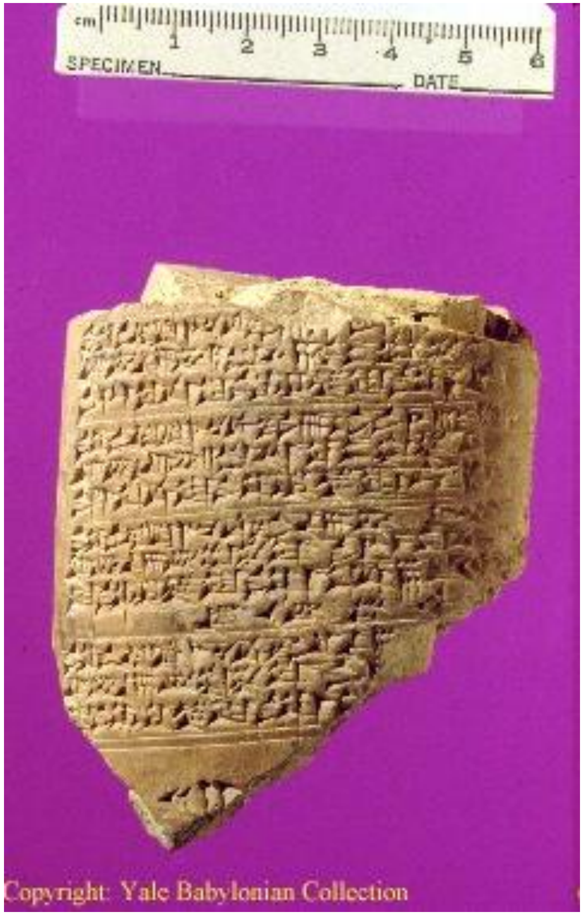
1 ma–na = 60 gin, 1 gin = 180 se,
1 ma–na = 10800 se

Μερικά τεχνικά στοιχεία του προβλήματος

- Το πρόβλημα είναι ένα από τα 22 πανομοιότυπα προβλήματα της πινακίδας YBC 4652 η οποία χρονολογείται την περίοδο 1800 – 1600 π.Χ.
- Η λύση του προβλήματος δίνεται στην πινακίδα χωρίς καμιά ένδειξη για τη μέθοδο με την οποία βρέθηκε.
- Είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν είχε κάποιο πρακτικό περιεχόμενο (αν ενδιέφερε πράγματι το αρχικό βάρος της πέτρας, τότε θα έπρεπε να ζυγιστεί πριν αρχίσουν οι διάφορες προσθαφαιρέσεις!)
- Κατά πάσα πιθανότητα τα προβλήματα αυτά αποτελούσαν ασκήσεις στις σχολές εκπαίδευσης των Βαβυλώνιων γραφέων.

Δύο όψεις της πινακίδας YBC 4652





Μια επίλυση του προβλήματος με χρήση αγνώστου και εξίσωσης

Βρήκα μια πέτρα	Έστω x το βάρος της πέτρας
Αφαίρεσα το ένα έβδομο	$x-\frac{1}{7}x=\frac{6}{7}x$
Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο	$\frac{6}{7}x+\frac{1}{11}\cdot\frac{6}{7}x=\frac{12}{11}\cdot\frac{6}{7}x=\frac{72}{77}x$
Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο	$\frac{72}{77}x-\frac{1}{13}\cdot\frac{72}{77}x=\frac{12}{13}\cdot\frac{72}{77}x=\frac{864}{1001}x$

$$\frac{864}{1001}x=1\,\text{ma-na}\Rightarrow x=\frac{1001}{864}\ \text{ma}-\text{na}$$

Η έκφραση του αποτελέσματος με τις υποδιαιρέσεις της κεντρικής μονάδας

$$\frac{1001}{864}\ \text{ma}-\text{na}=$$

$$\frac{1001}{864}\cdot 10800\ \text{se}=$$

$$12512\tfrac{1}{2}\ \text{se}=$$

$$10800\ \text{se}+1620\ \text{se}+90\ \text{se}+2\tfrac{1}{2}\ \text{se}=$$

$$1\,\text{ma}-\text{na}+9\tfrac{1}{2}\ \text{gin}+2\tfrac{1}{2}\ \text{se}$$

Μια λύση με αριθμητικό λογισμό κλασμάτων

$$1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{6}{7}+\frac{1}{11}\times\frac{6}{7}=\frac{12}{11}\times\frac{6}{7}=\frac{72}{77}$$

$$\frac{72}{77}-\frac{1}{13}\times\frac{72}{77}=\frac{12}{13}\times\frac{72}{77}=\frac{864}{1001}$$

Αφού τα $\frac{864}{1001}$ της πέτρας ζυγίζουν 1 ma–na, τότε το $\frac{1}{1001}$ θα ζυγίζει $\frac{1}{864}$ ma – na και άρα ολόκληρη η πέτρα

$$\frac{1001}{864}\ \text{ma}-\text{na}=1\ \text{ma}-\text{na}+9\tfrac{1}{2}\ \text{gin}+2\tfrac{1}{2}\ \text{se}$$

Μια ολιστική προσέγγιση της εξίσωσης

Βρήκα μια πέτρα	**Έστω x το βάρος της πέτρας**
Αφαίρεσα το ένα έβδομο	$x - \frac{1}{7}x$
Πρόσθεσα το ένα ενδέκατο	$+\frac{1}{11}\left(x - \frac{1}{7}x\right)$
Αφαίρεσα το ένα δέκατο τρίτο	$-\frac{1}{13}\left[x - \frac{1}{7}x + \frac{1}{11}\left(x - \frac{1}{7}x\right)\right]$

$$x - \frac{1}{7}x + \frac{1}{11}\left(x - \frac{1}{7}x\right) - \frac{1}{13}\left[x - \frac{1}{7}x + \frac{1}{11}\left(x - \frac{1}{7}x\right)\right] = 1$$

Μια λύση με χρήση βοηθητικών μονάδων

Αν θεωρήσουμε ως πρώτη βοηθητική μονάδα το μέρος της πέτρας

$$A = x - \frac{1}{7}x + \frac{1}{11}\left(x - \frac{1}{7}x\right)$$

τότε είναι $A - \frac{1}{13}A = \frac{12}{13}A = 1\ \text{ma-na} = 60\ \text{gin} = 10800\ \text{se}$

Άρα: $A = \frac{13}{12}\ \text{ma-na} = 65\ \text{gin} = 11700\ \text{se}$

Αν θεωρήσουμε ως δεύτερη βοηθητική μονάδα το μέρος της πέτρας

$$B = x - \frac{1}{7}x$$

τότε είναι $B + \frac{1}{11}B = \frac{12}{11}B = 65\ \text{gin}$

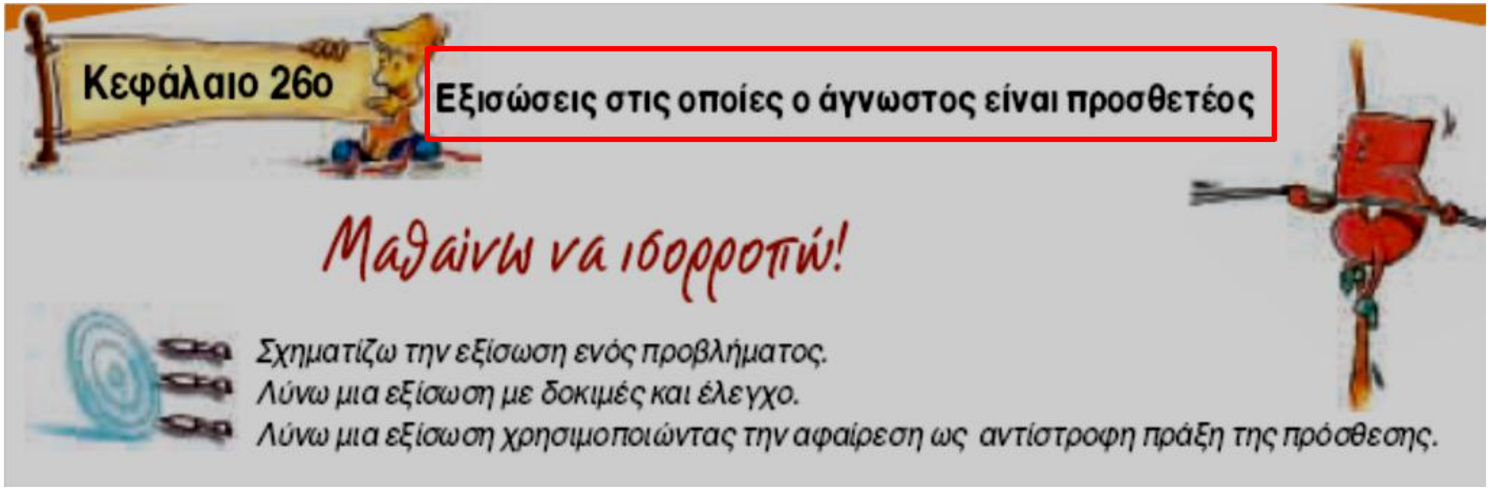
Άρα: $B = \frac{11}{12} \cdot 65\ \text{gin} = 10725\ \text{se}$

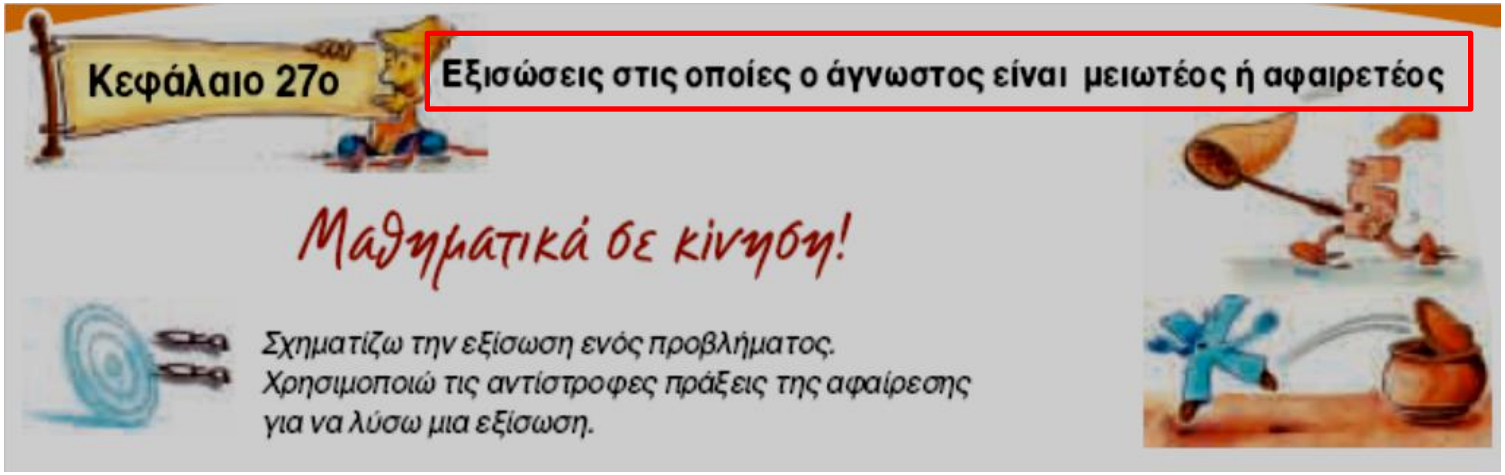
Άρα, αφού η πέτρα μείον το ένα έβδομό της (δηλαδή τα έξι έβδομα της πέτρας) είναι 10725 se, ολόκληρη η πέτρα θα είναι:

$$\mathbf{x = \frac{7}{6} \cdot 10725\ se = 12512\tfrac{1}{2}\ se = 1\, ma - na,\ 9\tfrac{1}{2}\ gin,\ 2\tfrac{1}{2}\ se}$$

Η επίλυση των εξισώσεων στο αναλυτικό πρόγραμμα της ΣΤ΄ Δημοτικού Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. (τόμος Α΄, 2002, σ.333)

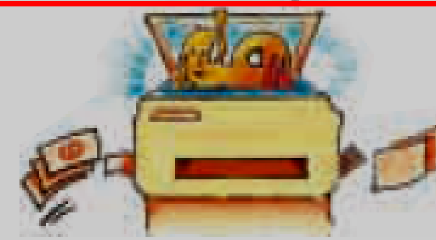
Να προσδιορίζουν τον αριθμό που πρέπει να προσθέσουν ή να αφαιρέσουν σε έναν άλλο για να βρουν έναν τρίτο αριθμό. Να προσδιορίζουν τον αριθμό με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουν ή να διαιρέσουν έναν άλλο για να βρουν έναν τρίτο αριθμό.	*Εξισώσεις* Εισαγωγή στην επίλυση εξισώσεων *(6 ώρες)*	Χρησιμοποιώντας ζυγαριά με δυο δίσκους, τοποθετούν στον ένα βάρος 100 γραμ. και στον άλλο 40 γραμ. Προβληματίζονται για το βάρος που πρέπει να τοποθετήσουν ακόμη, ώστε η ζυγαριά να ισορροπήσει παριστάνοντας τον αρχικά με το γράμμα χ. Στη συνέχεια τοποθετούν στον ένα δίσκο βάρος 140 γραμ. και στον άλλο 100 και προβληματίζονται για το πόσο βάρος θα αφαιρέσουν για να ισορροπήσει η ζυγαριά, παριστάνοντας το αρχικά με τον άγνωστο χ.


Κεφάλαιο 26ο
Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι προσθετέος
Μαθαίνω να ισορροπώ!
Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.
Λύνω μια εξίσωση με δοκιμές και έλεγχο.
Λύνω μια εξίσωση χρησιμοποιώντας την αφαίρεση ως αντίστροφη πράξη της πρόσθεσης.


Κεφάλαιο 27ο
Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι μειωτέος ή αφαιρετέος
Μαθηματικά σε κίνηση!
Σχηματίζω την εξίσωση ενός προβλήματος.
Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις της αφαίρεσης
για να λύσω μια εξίσωση.

Κεφάλαιο 28ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου



Ο άγνωστος πολλαπλασιάζεται!

Μελετώ τον τύπο του εμβαδού ως εξίσωση.
Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις του πολλαπλασιασμού.
Λύνω εξισώσεις όταν ο άγνωστος είναι παράγοντας γινομένου.

Κεφάλαιο 29ο

Εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος είναι διαιρετέος ή διαιρέτης

Αντανακλάσεις...

Σχηματίζω τις αντίστροφες πράξεις μιας διαίρεσης.
Χρησιμοποιώ τις αντίστροφες πράξεις για να λύσω μια εξίσωση όταν ο άγνωστος έχει τη θέση του διαιρετέου ή του διαιρέτη.

Ταξινόμηση των πρωτοβάθμιων εξισώσεων σε 6 κατηγορίες στην ΣΤ΄ Δημοτικού (!!)

Πριπτώσεις εξισώσεων

- Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους προσθετέους

- Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι μειωτέος
- Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι αφαιρετέος

- Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ένας από τους παράγοντες του γινομένου

- Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρετέος
- Εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι ο διαιρέτης

Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού (2007, σ.71)